Glossar: Gewinn

Gewinn bzw. Gewinnfunktion [Analysis, ökonomische Anwendungen]

Man erhält den Term der Gewinnfunktion, indem man von der Erlös- die Kostenfunktion abzieht:

$$G(x) = E(x) - K(x) \ .$$

Bem.: Die Definitionsmenge von G ist die ökonomische Definitionsmenge $D_{ök}$.= [0 ; x_{kap}]

Beispiel 1 (lineare Kosten- und Erlösfunktion):

Gegeben sind $K(x) = 0{,}25\ x + 8; \quad E(x) = 0{,}75\ x$.
Dann hat G die Gleichung
$G(x)$ =0,75 x – (0,25 x + 8) = $\underline{\underline{0{,}5\ x - 8}}$

Achtung (häufiger Fehler): Bei dieser Subtraktion von K (x) muss der Term der Kostenfunktion (oben: 0,25 x + 8) in Klammern gesetzt werden. Sonst zieht man nur die variablen Kosten vom Erlös ab und addiert die Fixkosten dazu, statt sie abzuziehen.

Standardaufgabentypen zur Gewinnfunktion:

Aufstellung der Gewinnfunktion zu gegebener **Erlös- und Kostenfunktion** (Ansatz: $G(x) = E(x) - K(x)$)

Aufstellung der Gewinnfunktion zu gegebenen Werten (Steckbriefaufgabe)
ökonomische Anwendung: Beispielrechnung: Gleichung einer linearen Gewinnfunktion aufstellen: hier

Bestimmung des Gewinns zu einer gegebenen Ausbringungsmenge x_0 (Einsetzen und G (x_0) berechnen)

Bestimmung der Ausbringungsmenge zu einem gegebenen Gewinn (Gleichung G(x) =… lösen)

Bestimmung der **Gewinnzone** ($G(x) = 0$)

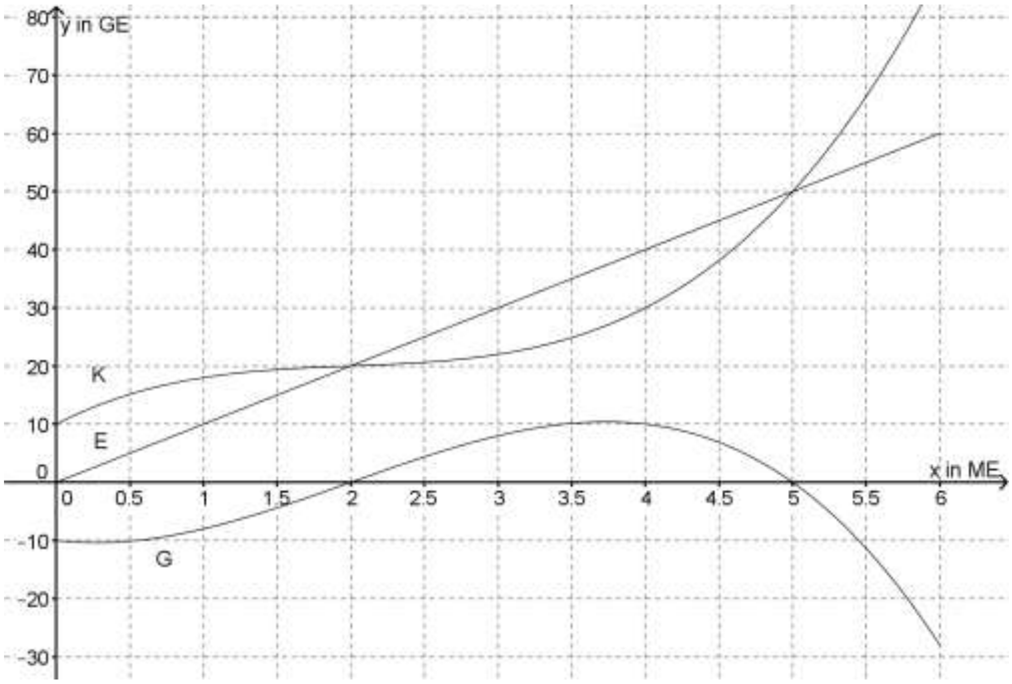
Bestimmung der gewinnmaximale Ausbringungsmenge und des **maximalen Gewinns** (Ansatz: $G'(x) = 0$)

Im Monopol-Fall: Bestimmung des **Cournotschen Punktes**.

Bem.: Im linearen Fall hat die Gewinnfunktion grundsätzlich genau eine Nullstelle, diese heißt Gewinnschwelle x_{GS}.

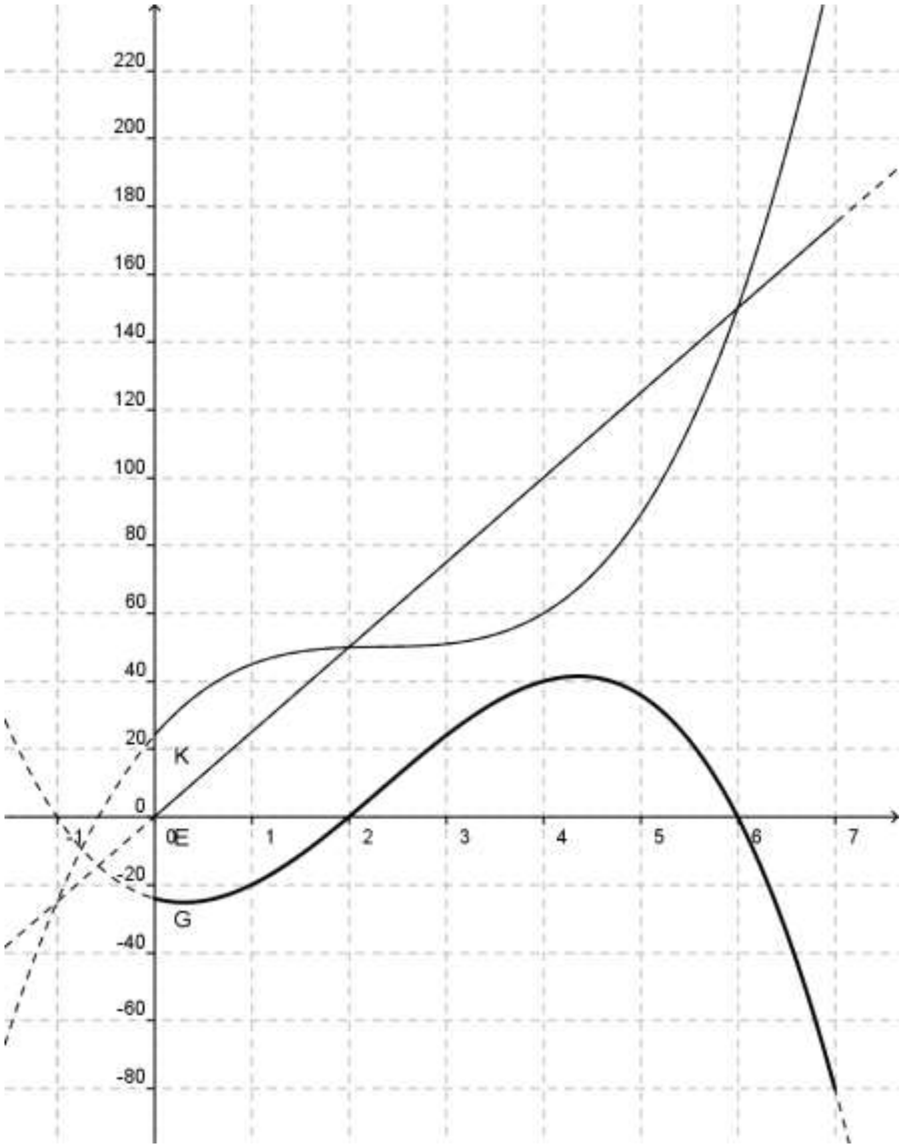
Beispiel 2 (Kostenfunktion vom Grad 3):

Die Gewinnfunktion ist kubisch (also vom Grad 3). Der Graph der Gewinnfunktion ist umgekehrt s-förmig.
Die Gesamtkostenfunktion K eines Unternehmens ist gegeben durch die Gleichung
$K(x) = x^3 – 6x^2 + 13x + 10$.
Die Erlösfunktion E ist gegeben durch $E(x) = 10x$.
Dann ist die Gleichung der Gewinnfunktion:
$G(x) = E(x) – K(x)$
$= 10x – (x^3 – 6x^2 + 13x + 10) = -x^3 + 6x^2 – 3x – 10$



Beispiel 3 (ebenfalls Kostenfunktion vom Grad 3):

Die Gewinnfunktion ist kubisch (also vom Grad 3). Der Graph der Gewinnfunktion ist umgekehrt s-förmig.
$K(x) = 2x^3 - 14x^2 + 33x + 24$
Der Preis liegt bei 26 $\frac{GE}{ME}$, also gilt:
$E(x) = 25\,x$.
$G(x) = E(x) – K(x)$
$= 25x – (2x^3 - 14x^2 + 33x + 24) = −2x^3 + 14x^2 - 8x - 24$



Graph: Am Graph liest man ab: Die Gewinnzone ist [2 ; 6]. Die gewinnmaximale Ausbringungsmenge liegt zwischen 4 und 5 ME der maximale Gewinn knapp über 40 GE.

Die rechnerische Bestimmung der Gewinnzone geschieht durch Lösen der Gleichung

$$G(x) = 0$$
$$-2\,x^3 + 14\,x^2 - 8\,x - 24 = 0$$

Die Berechnung kann einem geeigneten Taschenrechners oder CAS überlassen werden (mit Hilfe der Befehle solve beim CAS, polysolv beim TI30XPro, siehe hier).
Zur „händischen Lösung“ muss man zunächst eine Lösung der Gleichung „finden“ – d.h., wenn man keine weiteren Informationen hat (z.B. Wertetabelle des Taschenrechners oder Tipp des Lehrers oder Graph von G), muss man (systematische) Probieren. Zur Berechnung der weiteren Lösungen benutzt man zunächst das Horner-Schema oder Polynomdivision und löst im Anschluss die entsprechende quadratische Gleichung.
In der Regel erhält man zwei positive Lösungen und eine negative. Die negative liegt nicht in der ökonomischen Definitionsmenge und hat daher keine weitere Bedeutung. Die anderen beiden sind Gewinnschwelle und Gewinngrenze.

Die rechnerische Gewinnmaximierung greift auf die Mittel der Differentialrechnung zurück. Als erstes wird daher mit Hilfe der Potenzregel die Ableitung von G gebildet:

$G'(x) = -6x^2 + 28x - 8.$
notwendige Bedingung: G´ (x) = 0
$-6x^2 + 28x - 8 = 0$

Die Berechnung kann einem geeigneten Taschenrechners oder CAS überlassen werden (mit Hilfe der Befehle solve beim CAS, polysolv beim TI30XPRO).
Zur „händischen Lösung" benutzt man die quadratische Ergänzung oder die p-q-Formel.

Zur Überprüfung, ob es sich bei der Lösung tatsächlich um eine gewinnmaximale Ausbringungsmenge handelt, gibt es verschiedene Möglichkeiten (hinreichende Bedingung, Vorzeichenwechselkriterium, andere Argumente,)

Checklists:
Check, ob du sicher mit Gewinnfunktionen umgehen kannst: hier

weitere Links zum Thema ökonomische Funktionen