Glossar: Matrizenmultiplikation

Matrizenmultiplikation [Lineare Algebra, Matrizenrechnung]

Man kann zwei Matrizen A und B multiplizieren ($A \cdot B$), wenn A genauso viele Zeilen hat wie B Spalten.

Und das geht so, dass man jeweils eine Zeile von A zusammen mit einer Spalte von B verrechnet.

Am besten macht man das an einem Beispiel klar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Klarer wird die Vorgehensweise, wenn man sie „über Eck“ aufschreibt (Falksches Schema):

So geht man vor:

	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix}$

Es reicht aber, das Falksche Schema so aufzuschreiben (den Rest macht man im Kopf, auf einem Schmierzettel oder mit einem Taschenrechner):

	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$

Weiteres Rechenbeispiel: hier

Kannst du die Matrizenmultiplikation? Check

In die Definition muss man sich hereindenken – vor allem wegen der Indizes (das sind die kleinen Zahlen zur Durchnummerierung):

Def.: Das Produkt einer $(m \times n)$-Matrix A und einer $(n \times o)$-Matrix B berechnet man folgendermaßen (hier dargestellt in Form des **Falkschen Schemas**):

$\cdot$	$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \mathbf{b_{1j}} & \dots & b_{1o} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \mathbf{b_{2j}} & \dots & b_{2o} \\ \dots & & & \dots & & \mathbf{\dots} \\ \dots & & & \dots & & \mathbf{\dots} \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \mathbf{b_{nj}} & \dots & b_{no} \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \dots & \mathbf{a_{in}} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1o} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{mo} \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ c_{i1} & \dots & \dots & \mathbf{c_{ij}} & \dots & c_{io} \\ \dots & & & \dots & & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mo} \end{pmatrix}$

Jetzt kommt der Kernpunkt der Definition:
Dabei ist $\boldsymbol{c_{ij}} = \boldsymbol{a_{i1}} \cdot \boldsymbol{b_{1j}} + \boldsymbol{a_{i2}} \cdot \boldsymbol{b_{2j}} + \ldots + \boldsymbol{a_{in}} \cdot \boldsymbol{b_{nj}}$

Besonderheiten der Matrizenmultiplikation:
Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ, aber nicht kommutativ.

Anwendungen
Die Matrizenmultiplikation ist eine der Grundrechenarten der Matrizen – ohne sie geht in der Matrizenrechnung so gut wie gar nichts.
Berechnung des (Rohstoff-)Bedarfs bei mehrstufigen Produktionsprozessen,
Berechnung neuer Koordinaten bei Abbildungsmatrizen,
Berechnung der neuen Verteilung auf die Zustände bei Markov-Prozessen, …

Eine anwendungsnahe Einführung in die Matrizenmultiplikation: hier

Mehr zur Matrizenmultiplikation: hier