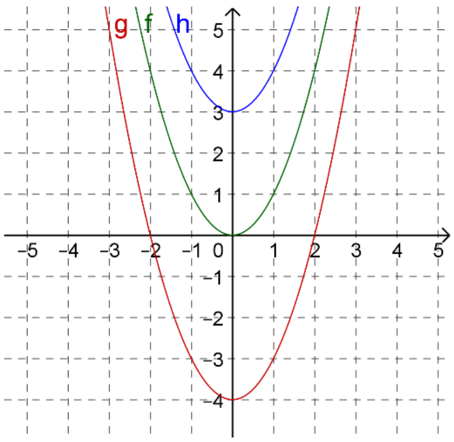
[Glossar]: Nullstelle einer quadratischen Funktion

Nullstelle einer quadratischen Funktion f [Analysis]

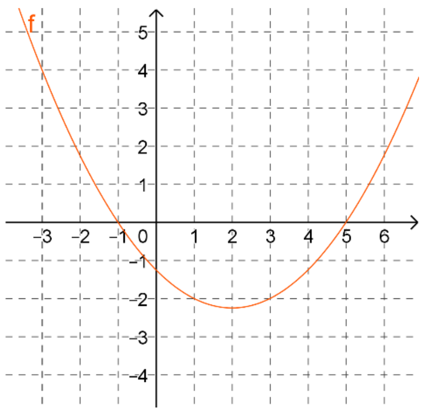
Eine quadratische Funktion hat entweder genau zwei Nullstellen oder genau eine oder gar keine.



Hier sind drei Parabeln abgebildet.
Die Funktion f mit $f(x) = x^2$ hat genau eine Nullstelle bei $x = 0$.
Die Funktion h mit $h(x) = x^2 + 3$ hat genau keine Nullstelle.
Die Funktion g mit $g(x) = x^2 + 3$ hat genau zwei Nullstellen bei $x = -2$ und bei $x = 2$.

Am einfachsten ist die Nullstellenbestimmung, wenn der Graph gegeben ist oder die Funktionsgleichung in faktorisierter Form vorliegt:
Um die Nullstellen zu bestimmen, schaut man sich nur die Linearfaktoren an (also die Klammerausdrücke) und ändert jeweils das Vorzeichen der Zahlen hinter dem x.

Beispiel:
$f(x) = \frac{1}{4}(x-5)(x+1)$
Die Nullstellen sind $x = 5$ und $x = -1$.



Oft hat man aber nur die Normalform:
Zur Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Funktion verwendet man dann in der Regel die p-q-Formel oder die quadratische Ergänzung:

Beispiel: $f(x) = -0{,}5\,x^2 - 4x - 3{,}5$

$f(x) = 0$
$\Leftrightarrow -0{,}5\,x^2 - 4x - 3{,}5$=0 | : (-0,5) bzw. · (-2)
$\Leftrightarrow x^2 + 8\,x + 7 = 0$ | -7
$\Leftrightarrow x^2 + 8\,x = -7$ | quadratische Ergänzung:+ $\left(\frac{8}{2}\right)^2$ also +16
$\Leftrightarrow x^2 + 8\,x + 16 = -7 + 16$ | binomische Formel
$\Leftrightarrow (x+4)^2 = 9$ | $\pm\sqrt{}$
$\Leftrightarrow x + 4 = -3$ oder $x + 4 = 3$ | -4
$\Leftrightarrow x = -7$ oder $x = -1$

An der Scheitelpunktform kann man sofort ablesen, ob es Nullstellen gibt oder nicht:

Wenn die Parabel nach oben geöffnet ist und die y-Koordinate des Scheitelpunkts ist positiv, gibt es keine Nullstellen.
Bsp: $f(x) = 0{,}2\,(x-5)^2 + 7$
$\uparrow$ $\uparrow$
$a > 0$ $y_S > 0$
nach oben geöffnet Scheitelpunkt über der x-Achse

Genauso ist es, wenn die Parabel nach unten geöffnet ist und die y-Koordinate des Scheitelpunkts ist negativ.

Berechnung der Nullstellen aus der Scheitelpunktform: hier

Anwendungen:
innermathematische Anwendung: Schnittpunkte von Parabeln mit der x-Achse; Differentialrechnung: Extremstellenbestimmung einer Funktion vom Grad 3, Wendestellenbestimmung einer Funktion vom Grad 4,
gleichmäßig beschleunigte Bewegung/Wurfparabeln: Auftreff-Zeitpunkt, Wurfweite
ökonomische Anwendungen: Gewinnzone im Monopol