LORE LORENTZ SCHULE

Glossar: Skalarprodukt

Skalarprodukt zweier Vektoren [Lineare Algebra / Vektorrechnung]

Das Skalarprodukt zweier dreidimensionaler Vektoren ist folgendermaßen definiert

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ = $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

Bei zweidimensionalen Vektoren entsprechend:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ = $a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$
= 2 · 1 + (-4) · 0 + 0,5 · (-10) = 2 + 0 – 5 = -3.

weitere Beispielrechnung: hier

Bem.: Für zwei beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, die miteinander den Winkel α einschließen, gilt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$.
Auch dies ist eine gleichberechtigte Möglichkeit, das Skalarprodukt zu definieren.

Anschaulich: In diesem Fall ist $\vec{v} \cdot \vec{w}$ die Länge der Projektion von $\vec{v}$ auf $\vec{w}$ multipliziert mit der Länge von $\vec{w}$.

Zusammenhang mit **Orthogonalität** - also dem Senkrechtstehen zweier Vektoren zueinander:
Da der Cosinus von 90° Null ist, können die beteiligten Vektoren so lang sein wie sie wollen, ihr Skalarprodukt wird immer Null sein. Man nennt solche Vektoren orthogonal, als Zeichen verwendet man „$\perp$“. Somit gilt:
$\vec{v} \perp \vec{w} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$.

Berechnung mit dem Taschenrechner oder CAS
Die Befehle heißen dotP oder dotProdukt
innermathematische Anwendungen:
Das Skalarprodukt ist ein nützliches Hilfsmittel bei der Berechnung von Winkeln und Abständen. Es kann auch

benutzt werden, um Geradengleichung in der Ebene oder Ebenengleichungen im Raum aufzustellen.

automatische Berechnung auf interaktiver website: arndt-bruenner

Winkelberechnung: Wenn wir uns für den Winkel interessieren, den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ miteinander einschließen, sollten wie uns nach einer Gleichung umsehen, in der dieser Winkel in irgendeiner Form vorkommt.
Zum Glück kennen wir so eine: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot cos(\alpha)$
Daraus ergibt sich sofort: $cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$
Um nun α zu ermitteln, benötigen wir die Umkehrfunktion des Cosinus - sie heißt Arcuscosinus (arccos oder auf vielen Taschenrechnern $\cos^{-1}$)

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

Beispiel: Gesucht ist der Winkel α
zwischen $\vec{a} = \binom{10}{-5}$ und $\vec{b} = \binom{6}{2}$;
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 10 \cdot 6 + (-5) \cdot 2 = 50.$
$|\vec{a}| = \sqrt{10^2 + (-5)^2} = \sqrt{125}$;
$|\vec{b}| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40}$;
$cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{\boldsymbol{b}}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{50}{\sqrt{125} \cdot \sqrt{40}} \approx 0{,}70710678$
$\alpha = \cos^{-1}(0{,}70710678) = 45°.$

automatische Berechnung auf interaktiver website: arndt-bruenner

physikalische Anwendungen:
Arbeit ist Kraft mal Weg, wenn aber die Kraft nicht genau in Richtung des Weges wirkt, muss dabei auch der Winkel zwischen beiden berücksichtigt werden:
$W = F \cdot s \cdot cos\,(\alpha)$
oder als Vektoren ausgedrückt:
$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cdot cos(\alpha)$

Links: Gute Einführung anhand physikalischer Beispiele:
http://www.kilchb.de/skalarpr.html#physik