Markov-Prozesse
Stationäre Verteilungen

Gegeben ist folgende stochastische Matrix: $M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}1 & 0{,}25 \end{pmatrix}$

Jede Grenzverteilung $\vec{v}_\mathrm{g}$ ist stationär, d.h. wenn sie einmal erreicht ist, bleibt sie erhalten:

$M \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$.

a) Bestimme eine stationäre Verteilung näherungsweise.

Rick will die stationäre Verteilung exakt bestimmen und wählt den Ansatz

$-0{,}8\, v_1 + 0{,}5\, v_2 + 0{,}25\, v_3 = 0$

$0{,}3\, v_1 - 0{,}6\, v_2 + 0{,}5\, v_3 = 0$

$0{,}5\, v_1 + 0{,}1\, v_2 - 0{,}75\, v_3 = 0$.

Das Ergebnis will er mit Hilfe eines CAS berechnen.

b) Erläutere, wie Rick auf das Gleichungssystem kommt.

c) Gib es in dein CAS ein. Rick ist verwundert, als sein Taschenrechner keine (eindeutige) Lösung liefert. Erkläre, warum das so ist.

d) Lisa empfiehlt Rick, die letzte Zeile durch $v_1 + v_2 + v_3 = 1$ zu ersetzen. Erkläre Rick, warum das sinnvoll ist, und bestimme auf die vorgeschlagene Weise $\vec{v}_\mathrm{g}$.

e) Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix A sind folgendermaßen definiert: Wenn das Produkt aus A und einem Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ ein Vielfaches von $\vec{v}$ ergibt (also $k \cdot \vec{v}$, so nennt man $\vec{v}$ einen Eigenvektor von A und k einen Eigenwert von A.
Begründe: Jeder stationäre Vektor ist ein besonderer Eigenvektor.

CC BY NC SA