

Käferwanderung

In einem Naturschutzgebiet haben Wissenschaftler die Wanderbewegungen einer bestimmten Käferart beobachtet. Diese Tierart hält sich in 3 Regionen (Gebiete A, B und C) auf. Die Käfer wurden markiert, sodass man das Wanderungsverhalten von Monat zu Monat relativ genau bestimmen konnte. Es entspricht der folgenden stochastischen Übergangsmatrix M .

$$M = \begin{pmatrix} 0,8 & a & 0,2 \\ 0,1 & b & 0,3 \\ 0,1 & c & 0,5 \end{pmatrix} \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Dabei gilt: Von den Tieren im Gebiet B verbleiben 60 % auch im kommenden Monat dort, und 10 % wandern nach A ab.

- a) Bestimme die Parameter a, b, c in der Übergangsmatrix M .
- b) Eine Zählung ergibt 300 Tiere im Gebiet A, 700 im Gebiet B und 200 im Gebiet C.
Berechne die Verteilung der Käfer 5 Monate danach. (Verteilung in absoluten Zahlen, runde dabei das Endergebnis auf ganze Zahlen.)
- c) Untersuche mittel der exakten Methode, ob es eine stationäre Verteilung bezüglich der Übergangsmatrix M für die Gesamtzahl von 1200 Tieren gibt. Beachte: Die Verteilung der Käfer ist diesmal nicht prozentual angegeben. Ermittle durch Probieren den Zeitpunkt, zu dem diese Fixverteilung bei dem gegebenen Modell (aufgrund der Rundung des Endergebnisses) erstmals erreicht wird.
- d) Einer der Wissenschaftler behauptet, dass der Wanderungsprozess schon längere Zeit stabil ist. Wie sah die Verteilung der Käfer demzufolge einen Monat vor der Zählung aus? Interpretiere das Ergebnis.
- e) Nach einem Jahr wird ein neues Gebiet D ebenfalls unter Naturschutz gestellt. Es wird vermutet, dass monatlich 2 % der Käfer im Gebiet A statt dort zu bleiben ins angrenzende Gebiet D abwandern und dann dort bleiben. Alle übrigen Wanderungsbewegungen ändern sich nicht. Untersuche, welche Auswirkungen dies langfristig auf die Verteilung der Käfer haben würde. (keine exakte Lösung eines Gleichungssystems verlangt)