

Übergangsmatrizen und Markov-Prozesse



Geocaching ist eine nette Freizeitbeschäftigung: Man benutzt sein Handy als GPS-Empfänger und Landkarte und sucht versteckte Gegenstände in wasserdichten Behältern (Geocaches) anhand von Suchaufträgen und GPS- Koordinaten.



Die meisten Funde sollen wieder zurückgelegt werden, aber es gibt auch sogenannten Travelbugs – Geocaches, die von einem Geocaching-Ort zum nächsten reisen sollen. Findet man einen Travelbug, so ist der Auftrag, ihn mitzunehmen und beim nächsten Geocaching-Ausflug im dort gefundenen Geocache zu deponieren.

Im Internet lassen sie die Wanderrouten von Travelbugs nachverfolgen.

Die Werbeagentur Brock & Thompson will den Export einer niederländischen Firma nach Deutschland ankurbeln. Sie startet zu Werbezwecken ein Geocache-Gewinnspiel und versteckt 2003 Travelbugs in Deutschland. Die Travelbugs dürfen für das Gewinnspiel auch in das Benelux-Gebiet (Belgien-Niederlande-Luxemburg) gebracht werden, aber in kein anderes Land.

- a) Untersuche anhand der folgenden Statistik, ob sich der Austauschprozess der Travelbugs als Markov-Prozess beschreiben lässt.

G_1 : Deutschland, G_2 : Benelux, t : Zeit nach Start in Monaten

Zeit t	1	2	3	4
Anzahl Travelbugs				
G_1	1600	1440	1376	1350
G_2	400	560

Für einen anderen Auftrag startet Brock & Thompson eine Travelbug-Aktion für Deutschland, das Benelux-Gebiet und Frankreich.

Die Agentur geht dabei von der monatlichen Übergangsmatrix $A = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$ aus.

Im Mai 2019 entspricht die Verteilung dem Vektor $\begin{pmatrix} 2364 \\ 1620 \\ 2016 \end{pmatrix}$.

- b) Berechne die Verteilung für August 2019.
 c) Bestimme die Verteilung für April 2019 und untersuche, wann die Aktion gestartet worden sein könnte.
 d) Bestimme die Grenzverteilung auf dem exakten Weg.



Nur 5 Travelbugs sind gelb. Alle sind zurzeit in Deutschland. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass ...

- e) ... ein bestimmtes davon im kommenden Monat nach Frankreich wechselt und dann zwei Monate lang dortbleibt.
- f) ... in 4 Monaten alle fünf (wieder) in Deutschland sind.
- g) ... in 5 Monaten mehr als drei (wieder) in Deutschland sind.
- h) ... in 4 Monaten alle fünf im selben Gebiet sind.

Die Agentur hat Zweifel, ob die oben genannte Übergangsmatrix tatsächlich gilt. Eine

Untersuchung führt zu Übergangsmatrix $B = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,3 & 0 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$

- i) Erläutere die Bedeutung im Vergleich zur Matrix B .
- j) Berechne die Gesamtzahl der Travelbugs zu Beginn, drei Monaten, nach 6 Monaten.
- k) Stell eine Funktion auf, mit der sich diese Gesamtzahl direkt berechnen lässt und berechne damit, wie lange es dauert, bis weniger als 100 Travelbugs übrig sind.

Bild: Weg dreier Travelbugs über Westeuropa hinaus



