

Geraden

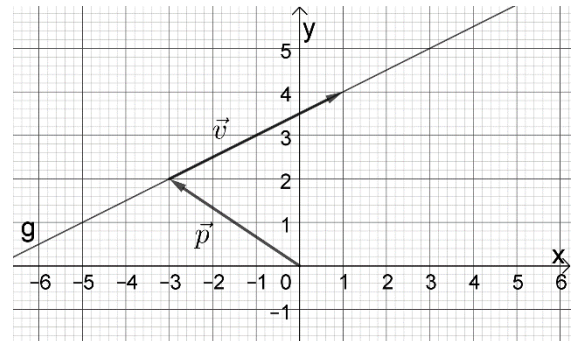
Um eine Gerade anzugeben, benötigt man einen Ausgangspunkt und eine Richtung: Man geht also zu Punkt A (einem beliebigen Punkt auf der Geraden) und dann so weit wie man will in die Richtung der Geraden

So kann man eine Gerade g in der folgenden Form darstellen: $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{v}$; wobei \vec{v} ungleich dem Nullvektor, $t \in \mathbb{R}$. Man nennt dies **Parameterdarstellung** der Geraden. Dabei ist \vec{p} der sogenannte **Stützvektor**, d.h. ein Ortsvektor irgendeines Punktes P, der auf der Geraden g liegt. \vec{v} ist der **Richtungsvektor**. Es handelt sich beim Richtungsvektor um einen Verschiebungsvektor zwischen zwei beliebigen Punkten auf der Geraden.

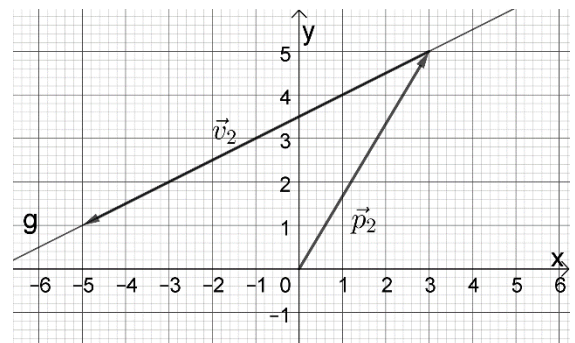
Beispiel: Dargestellt ist die Gerade, die durch den Punkt $A(-3|2)$ geht und den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat.

Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Dabei ist $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ der Stützvektor.



Bemerkung: Tauscht man \vec{p} gegen den Ortsvektor eines beliebigen anderen Punktes auf der Geraden aus und \vec{v} gegen irgend einen anderen Vektor mit der gleichen Richtung, so erhält man immer noch die gleiche Gerade:



Beispiel: $(3 | 5)$ liegt auf der Geraden g und $\begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches des alten Richtungsvektors, also ist

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$ eine andere Darstellung derselben Geraden wie oben.

Aufstellen der Geradengleichung aus zwei Punkten P und Q:

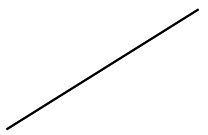
Sind zwei Punkte P und Q gegeben, so ermittelt man den Richtungsvektor der Geraden durch P und Q, indem man P von Q subtrahiert.

$g: \vec{x} = \vec{OP} + t \cdot (\vec{OQ} - \vec{OP}), t \in \mathbb{R}.$

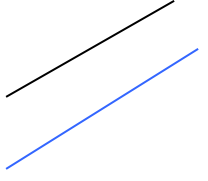
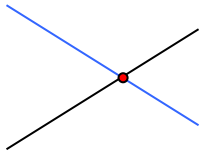
Lagebeziehungen von Geraden

Bei zwei Geraden g und h *in der Ebene* gibt es drei Möglichkeiten:

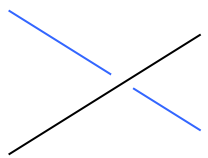
Bei zwei Geraden g und h *im Raum* kommt eine weitere Möglichkeit hinzu:

1. Sie sind identisch (also $g = h$),	
---	---



2. sie sind parallel (also $g \parallel h$) oder	
3. sie schneiden sich.	

Bei zwei Geraden g und h *im Raum* kommt eine weitere Möglichkeiten hinzu:

4. sie sind windschief .	<p>Die Zeichnung ist so gemeint, dass die eine Gerade „tiefergelegt“ ist und daher die andere nicht schneidet.</p> 
---------------------------------	--

Diese verschiedenen Möglichkeiten heißen **Lagebeziehungen**.

Untersuchung auf die gegenseitige Lage:

Gegeben sind die Geraden $g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + s \cdot \vec{v}_1; s \in \mathbb{R}$, wobei $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ und $g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2; t \in \mathbb{R}$, wobei $\vec{v}_2 \neq \vec{0}$.

Zuerst untersucht man, ob die beiden Richtungsvektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 kollinear ist, also ob es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\vec{v}_1 = a \cdot \vec{v}_2$. (Man untersucht dazu, ob bei allen Einzelgleichungen dieselbe Zahl für a herauskommt.)

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Sie sind kollinear, so reicht es, zu untersuchen, ob ein Punkt, der bekanntermaßen auf g_1 liegt (z.B. der Punkt P mit dem Ortsvektor \vec{p}) auch auf g_2 liegt. Dazu macht man die Punktprobe: $\vec{p} = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2$. Ist diese Vektorgleichung lösbar (d.h., kommt bei beiden Einzelgleichungen derselbe Wert für t heraus), so sind g_1 und g_2 identisch, ansonsten sind sie parallel.

1. Fall: Sie sind nicht kollinear

Bei Geraden in der Ebene bleibt nur der Fall übrig, dass die Geraden sich schneiden. Zur Berechnung des Schnittpunkts setzt man die Geraden gleich: $\vec{p}_1 + s \cdot \vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2$; Man erhält ein Gleichungssystem: zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Wenn wir schon ausgeschlossen haben, dass \vec{v}_1 und \vec{v}_2 kollinear sind, kann man sogar sicher sein, dass dieses eindeutig lösbar ist. Damit berechnet man s und t und setzt ein, um den Schnittpunkt zu ermitteln.

Bei Geraden im Raum bleiben zwei Möglichkeiten über: Die Geraden können sich schneiden oder aber windschief sein. Auch hier setzt man die Geraden gleich:

$$\vec{p}_1 + s \cdot \vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2;$$

Man erhält ein Gleichungssystem: drei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Es reicht zunächst, nur zwei Gleichungen zu betrachten, um s und t zu berechnen. Dann setzt man die ermittelten Werte für s und t in die Geradengleichungen ein und schaut, ob

dabei dieselben Punkte herauskommen. Stimmen diese beiden Punkte überein, so hat man den Schnittpunkt, andernfalls sind die Geraden windschief.

$$g_1: \vec{x} = \vec{p}_1 + s \cdot \vec{v}_1; s \in \mathbb{R},$$

$$g_2: \vec{x} = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2; t \in \mathbb{R}.$$

Untersuchung der Richtungsvektoren auf Kollinearität:

Ansatz: $\vec{v}_1 = a \cdot \vec{v}_2$

(kollinear, wenn alle Gleichungen denselben Wert für a ergeben)

kollinear

nicht kollinear

Punktprobe, ob der Punkt P_1 , der zu Stützvektor von g_1 gehört, auch auf g_2 liegt

Ansatz: $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2$

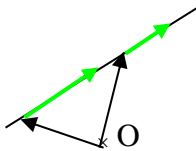
Untersuchung auf Schnittpunkte *im Raum*:

Ansatz: $\vec{p}_1 + s \cdot \vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2$

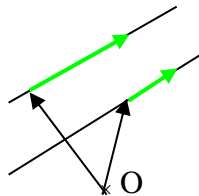
Daraus ergibt sich ein Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 2 Unbekannten. Man wählt zwei der Gleichungen aus und löst das entsprechende Gleichungssystem und berechnet daraus die Werte von s und t .

Einsetzen in die obige Vektorgleichung ergibt zwei Vektoren. Stimmen beide überein, so hat man den Schnittpunkt – ansonsten gibt es keinen Schnittpunkt.

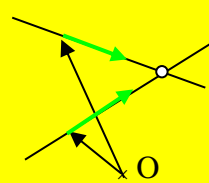
P_1 liegt auf g_2
Die Geraden sind identisch: $g_1 = g_2$.



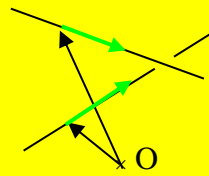
P_1 liegt nicht auf g_2
Die Geraden sind parallel: $g_1 \parallel g_2$.



Schnittpunkt
Die Geraden schneiden sich.



kein Schnittpunkt
Die Geraden sind windschief.



*Bei Geraden *in der Ebene* ist alles viel einfacher: Da ist an dieser Stelle (bei „nicht kollinear“) schon klar, dass sich g_1 und g_2 schneiden. Zur Berechnung des Schnittpunktes löst man das Gleichungssystem $\vec{p}_1 + s \cdot \vec{v}_1 = \vec{p}_2 + t \cdot \vec{v}_2$ und setzt dann wieder ein.

